

3 Dodatek (Lagrangeove enačbe)

64. Dana je Lagrangeova funkcija

$$L = \frac{\dot{q}_1}{2(a + bq_2)} + \frac{1}{2} q_2^2 \dot{q}_2^2 - (c + dq_2),$$

kjer so a , b , c in d konstante. Poiščite Lagrangeove enačbe gibanja v tem sistemu z dvema prostorskima stopnjama.

65. Delec z maso m se nahaja na gladki žici, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω okoli navpične osi s katero oklepa kot α . Določite enačbo gibanja delca in jo rešite.

66. Delce z maso m se giba po gladki krožnici s polmerom R , ki se vrti v vodoravni ravnini s konstantno kotno hitrostjo ω okoli ene izmed točk na krožnici. Poiščite enačbo gibanja delca.

67. Delec z maso m se giba po gladki krožnici. V začetnem trenutku je polmer krožnice R_0 , nato pa narašča sorazmerno s kvadratom časa $R = R_0 + kt^2$, pri čemer je ena izmed točk krožnice fiksna. Poiščite enačbo gibanja delca.

68. V vodoravni ravnini se nahaja obroček skozi katerega poteka homogena palica z maso m in dolžino L . Gibanje palice je omejeno na vodoravno ravnino, pri tem lahko drsi skozi obroček in se okoli njega vrti. Poiščite enačbo gibanja palice.

69. Delec z maso m je pritrjen na sredo lahke palice z dolžino l , ki je prislonjena ob gladko steno in tla. Palica se lahko giba tako, da se njena konca vseskozi dotikata stene in tal. Sprva palica miruje in oklepa z navpičnico kot θ_0 .

(a) Zapišite Lagrangeovo funkcijo in poiščite enačbo gibanja.

(b) Rešite enačbo gibanja za $\theta \ll 1$.

70. Delca z masama m sta pritrjena na lahko palico. Palica sloni ob gladki steni in se z drugim koncem dotika tal. Delca se lahko gibata tako, da se vseskozi dotikata stene in tal. Uporabite načelo navideznega dela in določite vodoravno silo, s katero moramo delovati na spodnji delec, da sistem miruje v položaju, ko palica oklepa z vodoravnico kot θ .

71. Delec z maso m niha v navpični ravnini na vrvici, katere dolžina se spreminja s časom kot

$$r = a + b \cos \omega t,$$

kjer so a , b in ω pozitivne konstante. Z uporabo D'Alembertovega načela poiščite enačbo gibanja delca.

72. Togi lahki palici, ki ležita v navpični ravnini, sta vrtljivo povezani s tremi delci. Na polovico prve palice deluje sila F pravokotno proti tлом, na drugo palico pa deluje

navor $\vec{M} = M\vec{k}$. Položaj sistema je podan z oddaljenostjo krajišč palic od vodoravne ravnine:

$$x_1 = q_1 + q_2 + \frac{1}{2}q_3,$$

$$x_2 = q_1 - q_2,$$

$$x_3 = q_1 - q_2 + \frac{1}{2}q_3,$$

kjer so q_i izbrane generalizirane koordinate.

- (a) Preverite, ali so generalizirane koordinate med seboj neodvisne in jih zapišite.
- (b) Poiščite generalizirane sile, ki delujejo na sistem.

73. Mehanizem na sliki je sestavljen iz dveh lahkih togih palic, ki sta vrtljivo povezani. Na začetek prve, ki je vrtljivo vpet, deluje navor z velikostjo M , na sredi druge pa sila Q v navpični smeri. Konec druge palice se lahko giba samo v vodoravni smeri. Z uporabo načela navideznega dela določite silo, s katero moramo delovati na konec druge palice v vodoravni smeri, da sistem miruje v ravnovesju tako, da prva palica oklepa z vodoravnico kot α .

74. Krogla s polmerom a in maso m se kotali po krogli s polmerom b , ki se vrtiljivo vrti okoli osi skozi težišče. Poiščite enačbe gibanja kotaleče se krogle s pomočjo Lagrangeovih enačb za neholonomni sistem.

75. Palico dolžine l postavimo navpično na gladko podlago. V nekem trenutku začne palica padati. Najdite enačbo gibanja palice, kjer za generalizirano koordinato izberite kot nagiba palice od navpičnice θ . Rešite enačbo gibanja za $\theta \ll 1$.

76. Sistem je sestavljen iz dveh delcev mas m_1 in m_2 , ki sta pritrjena na koncih lahke palice dolžine $\sqrt{2}R$. Palico položimo v luknjo sferične oblike s polmerom R . S načelom navideznega dela najdite ravnovesni položaj sistema.