Dean Korošak

Kinematika in dinamika

(*skripta za vaje*)

Katedra za aplikativno fiziko//Fakulteta za gradbeništvo//Univerza v Mariboru
Maribor, februar 2006

1 Naloge

1. Gibanje delca opisuje krajevni vektor:

$$\vec{r} = ct\hat{\imath} + \frac{1}{2}at^2\hat{\jmath},$$

kjer sta a in c konstanti. Določite krivuljo gibanja, hitrost in pospešek delca.

2. Gibanje delca je podano z:

$$x = b\cos kt, \quad y = c\sin kt.$$

Določite krivuljo gibanja delca in pospešek delca. Pokažite, da je velikost hitrosti delca v katerikoli toški krivulje gibanja obratno sorazmeren z razdaljo od izhodišča do tangente na krivuljo v izbrani točki.

3. Za delec, ki se giblje v skladu z:

$$\dot{x} + 2y = -R\sin t, \quad \dot{y} - 2x = R\cos t,$$

kjer je R konstanta, določite krivuljo gibanja. V začetku ($t = 0$) je delec v koordinatnem izhodišču.

4. Delec se giblje po elipsi:

$$c^2x^2 + b^2y^2 = b^2c^2,$$

s pospeškom v smeri osi y. Začetni položaj delca je $(0, c)$, začetna hitrost pa $v_0\vec{i}$. Določite pospešek delca v vsaki točki krivulje gibanja.

5. Delec z maso m se nahaja na gladki žici, ki se vrti s konstantno kotno hitrostjo ω okoli navpične osi s katero oklepa kot φ. Določite enačbo gibanja delca in jo rešite.

6. Delec se giblje po polkrogu s polmerom R s spremenljivo hitrostjo tako, da se projekcija delca na os x giblje s konstantno hitrostjo c. Določite hitrost in pospešek delca kot funkcijo kota φ, ki oklepa kot med osjo x in krajevnim vektorjem delca ter smer pospeška delca.

7. Delec se giblje po polkrogu s polmerom R tako, da je velikost tangentnega pospeška povsod enaka velikosti normalnega pospeška. Kako se spreminja hitrost delca s časom, če je začetna hitrost v_0?

8. Izračunajte odvod krajevnega vektorja po času v polarnem koordinatnem sistemu.

9. Delec se giblje s konstantno hitrostjo $\vec{v} = u\hat{\imath}$ vzdolž premice $y = 2$. Zapišite $\vec{v}$ v polarnih koordinatah.

10. Delec z maso m se giblje po gladki krožnici s polmerom R, ki se vrti v vodoravni ravnini s konstantno kotno hitrostjo ω okoli ene izmed točk na krožnici. Poiščite enačbo gibanja delca.

11. Gibanja delca je podano s krajevnim vektorjem $\vec{r}(t)$, ki pri gibanju opisuje konusno površino z vrhom v izhodišču koordinatnega sistema. V časovnem intervalu Δt opiše površino s ploščino:
$$\Delta A = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \Delta\vec{r}),$$
kjer je časovni interval tako majhen, da je površina skoraj ravna. Ploščinska hitrost delca je tako enaka:
$$\vec{S} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{v}),$$
kjer je $\vec{v}$ trenutna hitrost delca.
Izračunajte ploščinsko hitrost delca v polarnih koordinatnah, ki se giblje v ravnini $0xy$.

12. Delec se giblje v ravnini tako, da sta radialna in tangentna hitrost, konstantni:
$$v_\rho = a, \;\; v_\varphi = b.$$
Določite krivuljo gibanja in ploščinsko hitrost gibanja delca. Začetni položaj delca je $\rho_0 = R$ in $\varphi_0 = 0$.

13. Delec se giblje po krivulji $\rho = 4(1 - \cos\varphi)$ s konstantno ploščinsko hitrostjo katere projekcija na pravokotnico na ravnino gibanja je $S = 4$. Izračunajte velikost hitrosti delca, ko je $\varphi = \pi$.

14. Gibanje delca je dano z enačbama:
$$\rho = ct, \;\; \varphi = kt,$$
kjer sta c in t konstanti. Določite krivuljo gibanja in hitrost delca.

15. Delec se giblje v ravnini s konstantno ploščinsko hitrostjo po spirali z enačbo:
$$\rho = c \exp^{k\varphi},$$
kjer sta c in k konstanti. Pokažite, da je hitrost obratno sorazmerna oddaljenosti od izhodišča koordinatnega sistema.

16. Delec se giblje s konstantno hitrostjo po lemniskati, ki se v polarnih koordinatah zapiše tako:
$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi.$$
Kako je ploščinska hitrost delca odvisna od oddaljenosti od izhodišča koordinatnega sistema?

17. Delec se giblje po krivulji
$$\rho = \exp\varphi$$
s konstantno velikostjo hitrosti $v = \sqrt{2}$. Kako je velikost pospeška odvisen od oddaljenosti od koordinatnega izhodišča r?

18. Delec se giblje v ravnini tako, da je radialna komponenta njegove hitrosti konstantna in pozitivna $v_r = c$, za radialno komponentno pospeška pa velja:

$$a_r = -\frac{b}{r^3}.$$

Pri tem sta b in c konstanti. Določite krivuljo gibanja delca in ploščinsko hitrost.

19. Velikost hitrosti delca je podana z enačbo:

$$v = t^2 - 3t + 2.$$

Kako se naravna koordinata krivulje spreminja s časom? Kolikšno pot opravi delec do trenutka $t = 5$?

20. Gibanje delca je v kartezičnem koordinatnem sistemu opisano tako:

$$x = a(t - \sin t), \;\; y = a(1 - \cos t), \;\; a = const., \;\; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Kako se naravna koordinata delca spreminja s časom? V začetnem trenutku je $s(t = 0) = 0$.

21. Kolo s polmerom R se kotali brez drsenja po vodoravnih tleh. Hitrost središča kolesa je $\vec{v}_c$. Kolikšno pot opravi točka na obodu kolesa, ki je sprva v stiku s tlemi, do trenutka, ko je v najvišjem položaju?

22. Gibanje delca opisuje krajevni vektor:

$$\vec{r}(t) = 2b\cos^2 \omega t\hat{i} + b\sin 2\omega t\hat{j} + 2b\hat{k}, \;\; b, \omega = const.$$

Določite naravno koordinato delca v odvisnosti od časa ter enotne vektorje naravnega triedra v poljubni točki krivulje.

23. Delec se giblje v ravnini tako, da je normalna komponentna pospeška sorazmerna s tangentno:

$$a_n = a_t/\lambda$$

ter da je fleksijska ukrivljenost krivulje gibanja obratno sorazmerna naravni koordinati:

$$\frac{1}{R_{pr}} = \frac{1}{2\lambda s}.$$

Določite hitrost točke kot funkcijo naravne koordinate in čas v katerem je vrednosti naravne koordinate $2s_0$, če je začetna velikost hitrosti delca v_0 in začetna naravna koordinata s_0.

24. Delec se giblje po površini krogle tako, da je:

$$\frac{v_\theta}{v_\varphi} = const.$$

Določite enačbo krivulje gibanja delca.

25. Delec se giblje po krivulji:

$$\vec{r} = \exp(t)\cos(t)\hat{\imath} + \exp(t)\sin(t)\hat{\jmath} + \exp(t)\hat{k}.$$

Določite vektorje naravnega triedra v točki $A(1,0,1)$. Določite enačbe normalne, pritisnjene in tangencialne ravnine krivulje gibanja delca v točki $A(1,0,1)$.

26. Delec se giblje po krivulji za katero velja, da je razmerje med torzijo in ukrivljenostjo konstantno $C = \tau/\kappa$. Kakšna zveza velja med enotnimi vektorji naravnega triedra?

27. Delec se giblje po krivulji:

$$\vec{r}(t) = (\cos t - a\sin t)\hat{\imath} + (\sin t + a\cos t)\hat{\jmath} + t\hat{k}.$$

Izračunajte razmerjem med torzijo in ukrivljenostjo v poljubni točki krivulje.

28. Pokažite, da je torzija krivulje:

$$\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + \frac{1+t}{t}\hat{\jmath} + \frac{1-t^2}{t}\hat{k}$$

v vsaki točki krivulje enaka nič in da se delec, ki se giblje po takšni krivulji, giblje v ravnini.

29. Določite kotno hitrost palice, ki ima konce v točkah $A(1,5,1)$ in $B(5,1,1)$ in se vrti okoli nepremične točke 0. Hitrost $\vec{v}$ leži v xy ravnini, projekcija hitrosti središča palice na os x je $v_x = 3$. Trenutna os oklepa ostra kota z osema x in y, smerni kosinus $\cos\gamma$ (kot med trenutno osjo in osjo z)pa znaša $-\sqrt{3}/2$.

30. Telo se giblje s kotno hitrostjo $\omega = 6$. Trenutna os oklepa v danem trenutku s koordinatnimi osmi kote, ki so podani s smernimi kosinusi: $\cos\alpha = 1/3$, $\cos\beta = 2/3$, $\gamma > \pi/2$. Določite položaj tiste točke telesa, ki se nahaja v ravnini $z = 0$ in se giblje s komponentnama hitrosti $v_x = v_y = 2$.

31. Valj se kotali po vodoravni podlagi brez drsenja s kotno hitrostjo ω in kotnim pospeškom α. Določite hitrost in pospešek poljubne točke na obodu valja.

32. Tanka plošča se giblje v ravnini xy. V nekem trenutku ima točka $T(1,2,0)$ hitrost $2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath}$. Kolikšna je hitrost točke $T_1(-1,4,0)$, če je kotna hitrost plošče $-2\hat{k}$?

33. Na tanki plošči, ki se giblje v ravnini xy je razdalja med dvema točkama T in T_1 enaka $-5\hat{\imath} + 10\hat{\jmath}$. Določite kotno hitrost plošče, če je hitrost točke T enaka $7\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$, x-komponenta hitrosti točke T_1 pa je enaka 5. Določite hitrost točke T_1.

34. Palica z dolžino L drsi ob gladki navpični steni tako, da se zgornje krajišče A vseskozi dotika stene, spodnje krajišče B pa drsi po vodoravnih tleh. V nekem trenutku je točka B oddaljena za b od stene ter se giblje s hitrostjo v_B. Določite hitrost točke A in kotno hitrost palice.

35. Palica AB se giblje tako, da se njen konec A stalno dotika dna polkrožne jame, točka C pa drsi po njenem robu. Določite hitrost v točki C, ko se točka A nahaja na dnu polkrožne jame ter se giblje s velikostjo hitrosti v_A.

36. Krožna plošča se kotali brez drsenja po vodoravni ravnini tako, da njeno središče opisuje krožnico s polmerom R s stalno hitrostjo $\vec{v}_0$, okoli središča pa se vrti s kotno hitrostjo ω. Določite pol pospeška plošče.

37. Palica AB z dolžino L se giblje vpeta med dve pravokotni vodili. Določite pol pospeška palice v trenutku, ko se spodnje krajišče palice giblje s pospeškom $\vec{a}_A$ v levo, zgornje pa s pospeškom $\vec{a}_B$, pri čemer sta velikosti pospeškov sorazmerni $a_A = \sqrt{3}a_B$. Palica pri tem oklepa z osjo x kot 30 ^{o}.

38. Palica dolžine L, ki se giblje v ravnini xy v nekem trenutku leži vzdolž osi x. Pospeška krajišč palice sta med seboj vzporedna v nasprotnih smereh in oklepata s smerjo palice kot α. Določite kotno hitrost, kotni pospešek in pol pospeška palice.

39. V nekem trenutku so projekcije vektorja trenutne kotne hitrosti telesa, ki se vrti okoli nepremične točke, na osi pravokotnega koordinatnega sistema $\omega_x = \sqrt{3}$, $\omega_y = \sqrt{5}$ in $\omega_z = \sqrt{7}$. Določite hitrost točke s koordinatami $x = \sqrt{12}$, $y = \sqrt{20}$ in $z = \sqrt{28}$.

40. Točka $C(0, 1, 2)$ telesa, ki se vrti okoli nepremične točke 0, ima v nekem trenutku hitrost, ki oklepa s koordinatnimi osmi pravokotnega koordinatnega sistema kote s smernimi kosinusi $\cos\alpha = -2/3$, $\cos\beta = 2/3$ in $\cos\gamma = -1/3$. Hitrost točke $B(0, 0, 2)$ pa je takrat $\vec{v}_B = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$. Določite velikost hitrosti točke C, velikost kotne hitrosti in enačbo trenutne osi vrtenja telesa.

41. Vektor kotne hitrosti togega telesa, ki se vrti okoli nepremične točke v nekem trenutku znaša $\vec{\omega} = t^2\hat{\imath} + t\hat{\jmath} + 3\hat{k}$. Določite koordinate točke T, ki ima v trenutku $t_1 = 1$ pospešek $\vec{a}_T = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + \hat{k}$.

42. Matrika A je ortogonalna, če je:
$$A^{-1} = A^T,$$
kjer je
$$A^T_{ij} = A_{ji}.$$
(a) Pokažite, da je produkt dveh ortogonalnih matrik tudi ortogonalna matrika.
(b) Pokažite, da če je A ortogonalna matrika velikosti 3x3, so stolpični vektorji enotni in medsebojno pravokotni.

43. Denimo, da je vektor $\vec{x}^{'}$ podan s transformacijo vektorja $\vec{x}$:
$$\vec{x}^{'} = A\vec{x},$$
kjer je A transformacijska matrika. Za dano matriko F poiščite matriko F', da bo:
$$\vec{x}^{'T} F^{'} \vec{x}^{'} = \vec{x}^T F \vec{x}.$$

44. Delec z maso m se giblje pod vplivom sile $F = a - bt$, kjer je t čas. Določite časovni interval T v katerem se delec ustavi, če se je pričel gibati s hitrostjo v_0 v smeri delovanja sile. Kolikšno pot opravi do ustavljanja?

45. Na delec deluje konstantna sila K v sredstvu, ki deluje na gibanje z uporom sorazmernim kvadratu hitrosti delca. Določite silo K tako, da se hitrost delca poveča iz v_0 na v_1, ko opravi pot s.

46. Homogena veriga z maso m in dolžino $2l$ leži na gladki mizi s polovico dolžine. Kako se veriga giblje pri drsenju z mize?

47. Delec z maso m, ki se giblje s hitrostjo v_1 preide iz polprostora s konstantno potencialno energijo U_1 v polprostor s konstantno potencialno energijo U_2. Določite spremembo smeri gibanja delca pri tem prehodu.

48. Preverite katere od naslednjih sil so konservativne in za njih poiščite pripadajoče potencialne energije:

$$F_x = 6abyz^3 - 20bx^3y^2, F_y = 6abxz^3 - 10bx^4y, F_z = 18abxyz^2,$$

$$F_x = 18abyz^3 - 20bx^3y^2, F_y = 18abxz^3 - 10bx^4y, F_z = 6abxyz^2.$$

49. Sistem sestavljata delca z masama m_1 in m_2. Pokažite, da se kinetična energija sistema lahko zapiše kot vsota kinetične energije središča mase in kinetične energije relativnega gibanja delcev:

$$T = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\mu v_r^2,$$

kjer je $m = m_1 + m_2$ skupna masa sistema, $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ reducirana masa sistema, v_{cm} velikost hitrosti središča mase in v_r velikost relativne hitrosti delcev.

50. Na delec, ki se giblje v ravnini xy, deluje sila s komponentama:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Pokažite, da je prvi integral enačbe gibanja oblike:

$$m\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} = U + const.$$

51. Na vrhu gladke polkrogle se nahaja delec z maso m. Delec se prične gibati s velikostjo hitrosti v_0 v vodoravni smeri.
(a) Določite Lagrangev množitelj za gibanje delca po polkrogli. (b) Kje telo zapusti polkroglo?

52. Delec z maso m se giblje po gladki žici s polmerom a, ki leži v horizontalni ravnini. Začetna hitrost delca je v_0. Pri gibanju deluje nanj upor, ki je sorazmeren kvadratu hitrosti $F_u = -kmv^2$, kjer je k konstanta. Kako se s časom spreminja položaj delca? Kakšna je reakcija žice? Vpliv teže zanemarimo.

53. Delec se giblje po žici v obliki parabole $y = ax^2$, ki leži v navpični ravnini iz točke (x_0, y_0) brez začetne hitrosti. Določite enačbe gibanja delca in reakcijo žice v vsaki točki.

54. Delec z maso m se giblje po notranji strani rotacijskega paraboloida z enačbo $x^2+y^2 = 2az$, kjer je a konstanta, teža pa deluje v smeri negativnega dela osi z. Začetni položaj delca je $(x_0, 0, z_0)$, začetna hitrost pa $(0, v_0, 0)$. Kako se giblje delec in kakšna je reakcija površine?

55. Ploščato togo telo s površinsko gostoto $\sigma(x, y)$ leži v ravnini $z = 0$ kartezičnega koordinatnega sistema.
(a) Pokažite, da je os z glavna os za to telo.
(b) Pokažite, da je v diagonaliziranem tenzorju vztrajnostnega momenta za to telo, največji element tenzorja enak vsoti manjših.

56. Trije delci z enakimi masami so postavljeni v naslednjih točkah kartezičnega koordinatnega sistema: $(a, 0, 0)$, $(0, 2a, 2a)$ in $(0, 2a, a)$. Določite glavne vztrajnostne momente in glavne osi za vrtenje sistema delcev okoli izhodišča koordinatnega sistema.

57. Tanka kvadratna plošča z maso m in stranico a leži v xy ravnini kartezičnega koordinatnega sistema tako, da se središče mase plošče ujema s koordinatnim izhodiščem, osi x in y pa sta pravokotni na stranici plošče. V nekem trenutku je kotna hitrost plošče $\vec{\omega} = \omega_0(\hat{\imath} + \hat{k})$. Določite vrtilno količino plošče v tem trenutku. Čez koliko časa se bo vrtilna količina zavrtela iz xz v yz ravnino?

58. Z uporabo Eulerjevih enačb gibanja togega telesa pokažite, da je prosto gibanje togega telesa okoli ene izmed glavnih osi stabilno le, še telo vrti okoli osi s pripadajočim največjim ali najmanjšim glavnim vztrajnostnim momentom.

59. Tanka homogena palica dolžine l in z maso m se vrti s konstantno kotno hitrosto ω okoli osi, ki gre skozi koordinatno izhodišče in oklepa s smerjo palice kot φ.
(a) Določite glavne vztrajnostne momente za glavne osi, ki gredo skozi koordinatno izhodišče.
(b) Določite vrtilno količino palice in navor, ki deluje nanjo.

60. (a) Za homogen valj z maso m, polmerom osnovne ploskve R in višino h določite težišče in glavne osi z izhodiščem v težišču. Izračunajte glavne vztrajnostne momente valja.
(b) Denimo, da se valj vrti s kotno hitrostjo ω okoli osi, ki gre skozi težišče in točko na robu med osnovno ploskvijo in plaščem valja. Določite vrtilno količino v telesnem koordinatnem sistemu.
(c) Zapišite Eulerjeve enačbe za gibanje valja in izračunajte navor na valj.

2 Rešitve

1. $y = \frac{a}{2c^2}x^2$, parabola.

2. $v = \frac{kbc}{d}$, $d = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{b^4}+\frac{y^2}{c^4}}}$.

3. $x = R(\cos 2t - \cos t)$, $y = R(\sin 2t - \sin t)$
   s transformacijo: $x' = x + R,\ \ y' = y$ lahko zapišemo rešitev v polarnih koordinatah
   $\rho = R(2\cos\varphi - 1)$.

4. $\ddot{y} = -\frac{c^4 v_0^2}{b^2 y^3}$.

5. v krogelnem koordinatnem sistemu: $T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin^2\varphi)$
   $V = mgr\cos\varphi$
   $L = T - V$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$, $\frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega^2\sin^2\varphi - mg\cos\varphi$
   $\ddot{r} - \omega^2 r\sin^2\varphi + g\cos\varphi = 0$
   $r = b/a + c_1\exp(\sqrt{a}t) + c_2\exp(-\sqrt{a}t),\ b = g\cos\varphi,\ a = \omega^2\sin^2\varphi$.

6. $\dot{x} = c,\ \ \ddot{x} = 0,\ \dot{y} = -c\mathrm{ctg}\varphi,\ \ \ddot{y} = -\frac{c^2}{R\sin^3\varphi}$.

7. $v = v_0\frac{R}{R - v_0 t}$.

8. $\dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$.

9. $\vec{v} = u(\cos\varphi\hat{e}_\varphi)$.

10. $\varphi = \omega t$
    $x = R\cos\varphi + R\cos(\varphi + \theta)$,
    $y = R\sin\varphi + R\sin(\varphi + \theta)$, kjer je θ kot med premico, ki gre skozi izhodišče koordinatnega sistema in središče krožnice ter med premico skozi središče krožnice in trenutni položaj delca.
    $L = T = \frac{1}{2}mR^2(\omega^2 + (\omega + \dot{\theta})^2 + 2\omega(\omega + \dot{\theta})\cos\theta)$
    $\ddot{\theta} + \omega^2\sin\varphi\theta = 0$.

11. $S_\rho = 0,\ \ S_\varphi = 0,\ \ S_z = \rho^2\dot{\varphi}$.

12. $\rho = R\exp\left(\frac{a}{b}\varphi\right)$.

13. $v = 1$.

14. $\rho = \frac{c}{k}\varphi,\ \ v = \sqrt{c^2 + k^2\rho^2}$.

15. $v = \frac{2S}{\rho}\sqrt{k^2 + 1}$.

16. $S = \frac{v}{2c^2}\rho^3$.

17. $a = \frac{\sqrt{2}}{\rho}$.

18. $\rho = \frac{b\rho_0}{b - c\rho_0(\varphi - \varphi_0)}$.

19. $s = 14,5$.

20. $s = 8a\sin^2(t/4)$.

21. $s = 4R$.

22. $s = 2b\omega t$
$\hat{e}_t = -\sin(s/b)\hat{\imath} + \cos(s/b)\hat{\jmath}$
$\hat{e}_n = -\cos(s/b)\hat{\imath} - \sin(s/b)\hat{\jmath}$
$\hat{e}_b = \hat{k}$.

23. $v = v_0\sqrt{\frac{s}{s_0}}, \;\; t = 2\frac{s_0}{v_0}(\sqrt{2} - 1)$.

24. $\tan(\theta/2) = \frac{1}{C}\exp(c\varphi)$, C je integracijska konstanta, c pa razmerje θ in φ komponent hitrosti delca.

25. $\hat{e}_t = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k})$
$\hat{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{\imath} + \hat{\jmath})$
$\hat{e}_b = \hat{e}_t \times \hat{e}_n$
normalna ravnina: $x + y + z - 2 = 0$
pritisnjena ravnina: $x + y - 2z + 1 = 0$
tangentna ravnina: $x - y - 1 = 0$

26. $\hat{e}_b + C\hat{e}_t = \vec{A}, \;\; c, \vec{A} = const.$

27. $\frac{\kappa}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{2 + a^2}}$.

28.

29. $\vec{\omega} = \left(\frac{3}{1 + 3\sqrt{6}}, \frac{3}{1 + 3\sqrt{6}}, -\frac{1}{1 + \sqrt{3}/3}\right)$.

30. $\vec{r} = (-1/2, 1/2, 0)$.

31. $\vec{v} = -\omega R(1 + \sin\varphi)\hat{\imath} + \omega R\cos\varphi\hat{\jmath}$,
$\vec{a} = (-\alpha R(1 + \sin\varphi) - \omega^2 R\cos\varphi)\hat{\imath} + (\alpha R\cos\varphi - \omega^2 R\sin\varphi)\hat{\jmath}$.

32. $\vec{v}_{T_1} = 6\hat{\imath} + 7\vec{\jmath}$.

33. $\vec{\omega} = \frac{1}{5}\hat{k}, \;\; \vec{v}_{T_1} = 5\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}$.

34. $\vec{v}_A = -\frac{bv_B}{\sqrt{L^2 - b^2}}\hat{\jmath}, \;\; \vec{\omega} = \frac{v_B}{\sqrt{L^2 - b^2}}\hat{k}$.

35. $v_C = v_A\frac{\sqrt{2}}{2}$.

36. $\rho = \frac{v_0^2}{R\omega^2}$.

37. $\rho = \frac{\sqrt{3}L}{2}$.

38. $\dot{\omega} = \frac{a_A + a_B \sin\alpha}{L}$, $\omega = \sqrt{\frac{a_A + a_B \cos\alpha}{L}}$, $\rho = L\frac{a_A}{a_A + a_B}$.

39. $\vec{v} = (0, 0, 0)$.

40. $v_c = 3$, $\omega = \sqrt{41}/2$, $-x = 2y = z/3$.

41. $\vec{r} = -\frac{5}{2}\hat{i} - \hat{j} - \frac{11}{2}\hat{k}$.

42. a) $(AB)(AB)^T = ABB^TA^T = ABB^{-1}A^{-1} = AA^{-1} = I$.
b) $\vec{x}^j$ naj bo vektor sestavljen iz elementov j-tega stolpca matrike A
$x_i^j = A_{ij}$
$\vec{x}^j \cdot \vec{x}^k = \sum_i x_i^j x_i^k = \sum_i A_{ij}A_{ik}$
$= \sum_i A_{ki}^T A_{ij} = (A^TA)_{kj} = I_{kj} = \delta_{kj}$.

43. $\vec{x}' = A\vec{x}$
$\vec{x}^T = \vec{x}'^T(A^{-1})^T = \vec{x}'^T A$
$\vec{x}^T F\vec{x} = \vec{x}'^T AFA^{-1}\vec{x}'$
$F' = AFA^{-1}$.

44. $T = \frac{a + \sqrt{a^2 + 2mbv_0^2}}{b}$.

45. $K = \frac{kv_0^2 - v_1^2 \exp(2ks)}{1 - \exp(2ks)}$, k je koeficient upora.

46. $x = \frac{l}{2}\left(\exp(t\sqrt{g/2l}) + \exp(-t\sqrt{g/2l})\right)$.

47. $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \sqrt{1 + \frac{2}{mv_1^2}(U_1 - U_2)}$.

48. $U = -6abxyz^3 + 5bx^4y^2$.

49. $T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$.
$\vec{v}_1 = \vec{v}_{cm} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{v}_r$,
$\vec{v}_2 = \vec{v}_{cm} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_r$.
$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_r^2$.

50. $m\ddot{x}dy = \frac{\partial U}{\partial y}dy$
$m\ddot{y}dx = \frac{\partial U}{\partial x}dx$
$m(\ddot{x}\dot{y} + \ddot{y}\dot{x})dt = dU$
$m\dot{x}\dot{y} = U + const.$

51. $\lambda = \frac{mgz - mv^2}{2R^2}$, $\lambda = 0$, $z = \frac{v_0^2 + 2gR}{3g}$.

52. $R_n = \frac{mv_0^2}{a(1+kv_0t)^2}$, $\varphi = C + \frac{1}{ak}\ln(1 + kv_0t)$.

53. $m\frac{dv}{dt} = -\frac{2amgx}{\sqrt{1+4a^2x^2}}$, $R_n = \frac{4mag(x_0^2 - x^2)}{(1+4a^2x^2)^{3/2}} + \frac{mg}{\sqrt{1+4a^2x^2}}$.

54. $\vec{R} = \lambda(2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} - 2a\hat{k})$
$\lambda = -\frac{m(ag+v^2-\dot{z}^2)}{2(a^2+2az)}$
$v^2 = v_0^2 + 2g(z_0 - z),\ \ \dot{z}^2 = \frac{2z(v_0^2+2gz_0)-4gz^2}{a+2z}.$

55. (a) plošča je tanka: $J_{xz} = J_{yz} = 0$
$J\hat{k} = J_{xz}\hat{\imath} + J_{yz}\hat{\jmath} + J_{zz}\hat{k} = J_{zz}\hat{k}$
(b) $J_{xx} = \int \sigma(x,y)y^2dxdy,\ \ J_{yy} = \int \sigma(x,y)x^2dxdy$
$J_{zz} = \int \sigma(x,y)(x^2+y^2)dxdy = J_{xx} + J_{yy}.$

56. $J_{ij} = \sum_k m_k(r_k^2\delta_{ij} - r_{ki}r_{kj})$
$J_{xx} = 13ma^2$, $J_{yy} = 6ma^2$, $J_{zz} = 9ma^2$, $J_{xy} = J_{zx} = 0$, $J_{zy} = -6ma^2$.
$\lambda_1 = 13ma^2$, $\lambda_{2,3} = \frac{3}{2}(5 \pm \sqrt{17})ma^2$
$\vec{x}_1 = [1,0,0]^T$, $\vec{x}_{2,3} = [0,(1 \pm \sqrt{17})/4,1]^T$.

57. $\vec{\Gamma} = ma^2\omega_0(\hat{\imath} + 2\hat{k})$
$\Delta t = \frac{\pi}{2\omega_0}.$

58. Naj bo J_1 največji glavni vztrajnostni moment in $\omega_1 = \omega = const$. Eulerjeve enačbe so:
$$J_i om\dot{e}ga_i - (J_j - J_k)\omega_j\omega_k = 0,$$
$i = \{1,2,3\}$, $j = \{2,3,1\}$, $k = \{3,1,2\}$
za majhne spremembe kotnih hitrosti: $\omega_1 = \omega + \delta\omega_1$, $\omega_2 = \delta\omega_2$, $\omega_3 = \delta\omega_3$ sledi:
$$\delta\ddot{\omega}_2 + \frac{(J_1 - J_3)(J_1 - J_2)}{J_2J_3}\omega^2\delta\omega_2 = 0.$$
Spremembe kotne hitrosti ostanejo majhne le kadar je $J_1 > J_3$ in $J_1 > J_2$ ali $J_1 < J_3$ in $J_1 < J_2$ oziroma kadar je J_1 največji ali najmanjši vztrajnostni moment.

59. (a) $J_1 = J_2 = ml^2/12$, $J_3 = 0$.
(b) $Gam\vec{m}a = \frac{ml^2}{12}\omega\sin\varphi\hat{e}_1$
$\vec{M} = \frac{ml^2}{12}\omega\sin\varphi\cos\varphi\hat{e}_2.$

60. (a) $J_1 = J_2 = \frac{m}{12}(3R^2 + h^2)$, $J_3 = \frac{mR^2}{2}$
(b) $\vec{\Gamma} = J_1\omega\sin\alpha\hat{e}_2 + J_3\omega\cos\alpha\hat{e}_3,\ \ \tan\alpha = 2R/h.$
(c) $\vec{M} = (J_1 - J_3)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\hat{e}_1.$

Literatura

[1] B. Cvikl, *Kinematika in dinamika*, Fakulteta za gradbeništvo, Maribor, 1998.