Bruno Cvikl
Univerza v Mariboru
Fakulteta za gradbeništvo
Katedra za aplikativno fiziko

OSNOVE LINEARNE OPTIMIZACIJE
(LINEARNO PROGRAMIRANJE)

Maksimum namenske funkcije

Linearno programiranje je metoda optimiranja **linearne** funkcije končnega števila neodvisnih spremenljivk, za katere se zahteva, da so vse nenegativne (kakšna lahko zavzame vrednost nič, ostale so pozitivne) in hkrati zadoščajo sistemu linearnih **neenačb**. Tovrstni problemi, ki pogosto nastopajo na področju trgovinskega poslovanja in ekonomiji, predstavljajo izhodišče za metode nelineranega programiranje in pa dinamičnega programiranja, ki se ju uporablja predvsem pri različnih analizah na področju tehnike.

Linearno programiranje rešuje vrsto problemov, ki so skupni naslednjemu primeru. Iz treh vrst osnovnih surovi, A, B in C, se izdelujeta dva proizvoda in sicer prvi v količini x, drugi pa v količini y. Za prvi proizvod sta potrebni 2 enoti surovine A, 2 enoti surovine B in 1 enota surovine C. Drugi proizvod je izdelan iz 2 enot A-ja, 1 enote B-ja in 2 enot C-ja. Izdelovalec ima na razpolago 900 enot A-ja, 700 enot B-ja in 800 enot C-ja. Množina izdelkov mora tedaj ustrezati naslednjim neenačbam,

$$\begin{aligned} 2x + 2y &\le 900 \\ 2x + y &\le 700 \\ x + 2y &\le 800 \end{aligned} \qquad (1)$$

Izkaže se, da znaša profitna stopnja prvega izdelka 2/3 profitne stopnje drugega izdelka in tako je celotna profitna stopnja enaka $2x/3 + y$, ki naj bo kar največja. Če z pomeni profitno stopnjo, tedaj se išče **maksimum** funkcije $z = 2x + 3y$, t. im. **namenske funkcije**, kjer spremenljivki x in y zadoščata zgornjim linearnim neenačbam ob hkratnem očitnem dodatnem pogoju, da sta x in y **nenegativni** števili, t.j. $x \ge 0$ in $y \ge 0$.

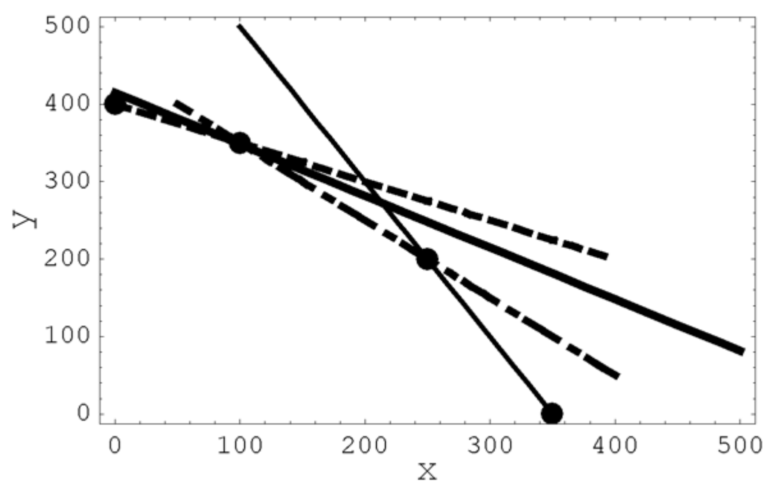
V predstavljenem primeru kjer je število spremenljivk majhno je problem mogoče rešiti **grafično**. Zaradi pogojev $x \ge 0$ in $y \ge 0$ leži rešitev problema (maksimum namenske funkcije, z) v 1. kvadrantu. Preostali trije izrazi, če upoštevamo enačaj, predstavljajo premice (linearne funkcije) od katerih vsaka prereže ravnino (x,y) na dve polravnini (orientirane pravokotno nanjo), pri čemer se te polravnine sekajo med seboj. Očitno torej spremenljivki x in y posedujeta vrednosti, ki zgornjim izrazom kvečjemu zadoščajo, oziroma ležijo v področju med koordinatnima osema in znotraj območja (ali kvečjemu na meji) danih treh polravnin. Enačbe polravnin (v prostoru – njihovo presečišče z (x,y) ravnino so seveda premice!) se glasijo,

$$2x + 2y = 900$$
$$2x + y = 700 \quad (2)$$
$$x + 2y = 800$$

in v (x,y) ravnini predstavljajo premice,

$$y = 450 - x$$
$$y = 700 - 2x \quad (3)$$
$$y = 400 - 0.5\,x$$

Premice se očitno med seboj razlikujejo po naklonskem kotu in se zaradi tega dejstva v (x,y) ravnini sekajo ter zato tvorijo neko poligonsko črto, ki se imenuje konveksni polieder, slika 1, za katerega so značilna sečišča premic s koordinatnima osema in pa sečišča med premicami.

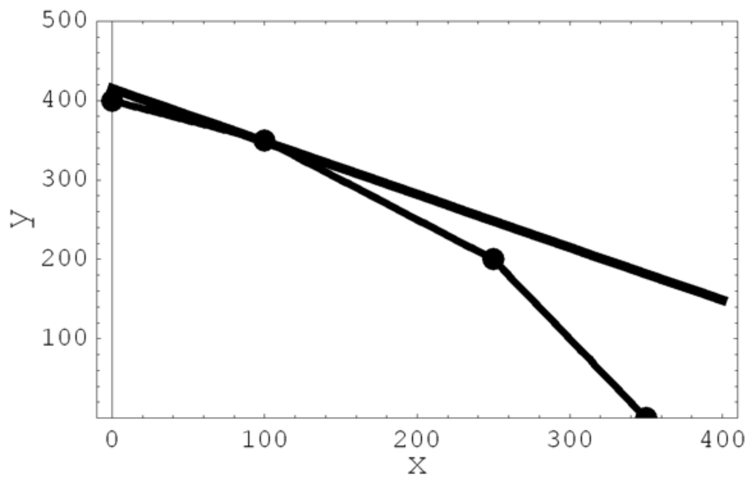


Slika 1.

Ekstremne točke konveksnega poliedra predstavljajo sečišča premic $y = 400 - 0.5\,x$ (črtkano), $y = 700 - 2x$ (tanka črta) in $y = 700 - 2x$ (črta-pika) v x-y ravnini. V eni od ekstremnih točk zavzame namenska funkcija maksimum. Za zadani problem je namenska funkcija $z = 2x + 3y$, t.j. premica (debela črta), ki doseže maksimum v točki (100, 350).

V prikazanem primeru (črtkana) polravnina (katere presek z (x,y) ravnino je premica) $y = 400 - 0.5x$ poteka skozi dve sečišči in sicer z y-osjo skozi $T_1 = (0, 400)$ in skozi točko $T_2 = (100, 350)$, ki je sečišče s premico $y = 450 - x$ (črtkana z daljicama različnih dolžin). Drugo sečišče slednje s premico $y = 700 - 2x$ je v točki $T_3 = (250, 200)$ pri čemer le-ta seka x-os v točki $T_4 = (350, 0)$. Možne rešitve zadanega problema ležijo torej v območju, ki obsega poligonske veznice točk T_1-T_2-T_3-T_4 in koordinatni osi x v intervalu od 0 pa do x =350 ter y osjo v intervalu vključno z izhodiščem pa vse do y = 400.

Namenska fukcija z = 2x + 3y katere maksimum je potrebno določiti predstavlja družino (familijo) med seboj vzporednih premic (enakih smernih kotov), katerih enačbe se glasijo $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}z$ pri čemer se mora določiti z takšen, da zavzameta spremenljivki x in y največji vrednosti. Slednja zahteva pomeni, da iščemo premico danega (znanega) nagiba, ki ustreza pogojnim enačbam in je hkrati najbolj oddaljena od koordinatnega izhodišča. Ta premica je na sliki označena s krepko črto in poteka skozi točko T_2 = (100, 350).



Slika 2.

Konveksni polinom, ekstremne točke in potek namenske funkcije z = 2x + 3y, (premica) za primer maksimuma.

Slika 2 prikazuje konveksni poligon za zadani primer pri čemer so sečišča premic, t.j. vogali poligona, posebej označena. Vse točke, ki se nahajajo znotraj konveksnega poligona (in so omejene izključno na I kvadrant) ustrezajo zgoraj zapisanim (pogojnim) neenačbam, točke na poligonskih daljicah pa (pogojnim) enačbam. V primeru, da obstaja končno mnogo rešitev problemov linearnega programiranja in takšen primer nastopa tukaj, je mogoče dokazati, da podaja rešitev (t.j. maksimalna vrednost namenske funkcije) ena od sečišč (t.j. ekstremnih točk) konveksnega poliedra. Torej brž, ko so koordinate ekstremnih točk konveksnega poliedra poznane je potrebno za vsako izmed njih izračunati vrednost namenske funkcije in določiti tisto za katero zavzame namenska funkcija največjo vrednost.

V zadanem primeru (rešitev je smiselna le za x > 0 in hkrati y > 0) obstajata dve takšni ekstremni točki s koordinatami, T_2 = (100, 350) in T_3 = (250, 200). Vrednost namenske funkcije v T_2 je z = 2 x 100 + 3 x 350 = 1250, v ekstremni točki T_3 pa znaša z = 2x 250 + 3 x 200 = 1100. Očitno je torej rešitev našega problema **x = 100** in **y = 350** proizvodov, ki bodo imeli za posledico največji denarni donos za njihovega izdelovalca.

Izkaže se, da obstaja splošna sistematična metoda iskanja ekstrema (maksimuma ali minimuma namenske funkcije), ki se imenuje metoda simpleks in je podrobneje razložena v nadaljnem.

Toda predhodno je potrebno utrditi nekatere osnove končno dimenzionalnih vektorskih prostorov, katerega lastnosti (za naše namene) so zgolj posplošitev lastnosti običajnega tri dimenzionalnega prostora.

Vsak (poljubni) vektor $\vec{V}$ se v kartezičnem koordinatnem sistemu enolično zapiše kot vektorska vsota treh enotnih vektorjev, $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ v obliki,

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k} \tag{1*}$$

kjer so V_x , V_y in V_z komponente vektorja $\vec{V}$ na koordinatne osi x, y in z. Koordinatne osi kartezičnega koordinatnega sistema so definirane z enotnimi vektorji $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ in tvorijo **bazo** tri dimenzionalnega vektorskega prostora, kar pomeni, da se poljubni vektor $\vec{V}$ v tem prostoru enolično zapiše kot <u>linearna kombinacija</u>, enačba (1*), teh treh enotnih vektorjev.

Toda izbira baze danega (t.j. tri dimenzionalnega kartezičnega prostora) je sicer poljubna in zato ni enolična. Splošno velja: **bazo n-dimenzionalnega vektorskega prostora tvori najmanjše število (torej n, sicer poljubnih) vektorjev s katerimi je mogoče izraziti vsak vektor tega prostora.** V tridimenzionalnem vektorskem prostoru so dodobra uveljavljene baze, ki jih predstavljajo n.pr. trije enotni vektorji prostorskega polarnega koordinatnega sistema $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ in $\vec{k}$, kjer se poljubni vektor enolično zapiše v obliki,

$$\vec{V} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\varphi \vec{e}_\varphi + V_z \vec{k} , \tag{2*}$$

nadalje trije enotni vektorji krogelnega koordinatnega sistema, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$, itd. Dimenzija vektorskega prostora je torej določena z (najmanjšim) številom **linearno neodvisnih vektorjev**, ki tvorijo bazo tega prostora.

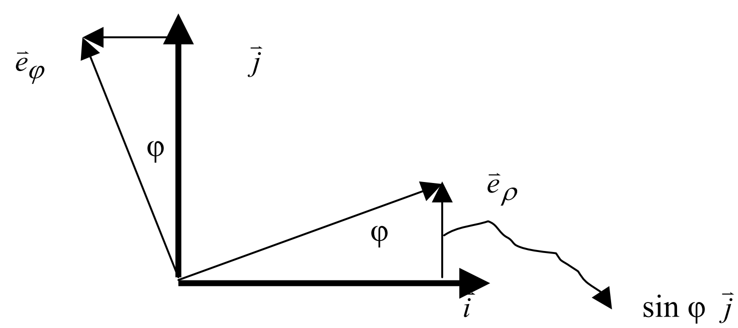
Enačbo (1*) (in seveda tudi enačbo (2*), itd.) je pa mogoče zapisati še drugače. Preimenujmo enotne vektorje $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$, ki ležijo na oseh kartezičnega koordinatnega sistema v enotne vektorje $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$ in jih zapišimo v obliki enostolpične matrike,

$$\vec{i} \equiv \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{j} \equiv \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{k} \equiv \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3*}$$

in alternativni zapis enačbe (1*) zavzame tedaj obliko,

$$\vec{V} = V_1\,\vec{e}_1 + V_2\,\vec{e}_2 + V_3\,\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \qquad (4^*)$$

kjer sedaj očitno pomenijo $V_x \equiv V_1$, $V_y \equiv V_2$ in $V_z \equiv V_3$. Vsak vektor danega vektorskega prostora se tedaj lahko, v temu prostoru ustrezno izbrani bazi, zapiše kot enostolpična matrika, enačba (4*). Če si kot bazne vektorje izberemo n.pr. enotne vektorje $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ in $\vec{k}$, jih preimenujemo (toda njihov pomen – gre za bazo prostorskega polarnega koordinatnega sistema - pa seveda ohranimo) v enotne vektorje te baze $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ in $\vec{e}_3$, ki ležijo vzdolž koordinatnih osi prostorskega polarnega koordinatnega sistema, je tedaj zapis poljubnega vektorja $\vec{V}$ podan z enačbo (4*), pri čemer pa tokrat pomenijo $V_1 = V_\rho$, $V_2 = V_\varphi$ in $V_3 = V_z$. Sedaj poizkušajmo odgovoriti na vprašanje, kako so komponente vektorja $\vec{V}$ med seboj povezane. Ker velja (glej B. Cvikl: Kinematika in dinamika, poglavje z naslovom Linearne transformacije),



Vektor $\vec{V}$, se v obeh bazah zapiše na naslednji način,

$$\vec{V} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k} = V_\rho\,\vec{e}_\rho + V_\varphi\,\vec{e}_\varphi + V_z\,\vec{k} \qquad (5^*)$$

Povezava med baznimi vektorji je razvidna iz slike 3 in znaša,

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \\ \vec{k} &= \vec{k} \end{aligned} \qquad (6^*)$$

tako, da iz primerjave izpeljemo transformacijske lastnosti komponent vektorja $\vec{V}$,

$$\begin{aligned} V_x &= V_\rho \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi \\ V_y &= V_\rho \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi \\ V_z &= V_z. \end{aligned} \qquad (7^*)$$

Obratno zvezo pa dobimo, če iz enačb (6*) izrazimo enotna vektorja $\vec{i}$ in $\vec{j}$,

$$\vec{i} = \cos\varphi\ \vec{e}_\rho - \sin\varphi\ \vec{e}_\varphi$$
$$\vec{j} = \sin\varphi\ \vec{e}_\rho + \cos\varphi\ \vec{e}_\varphi \qquad (8^*)$$
$$\vec{k} = \vec{k}$$

tako, da je

$$V_\rho = V_x \cos\varphi + V_y \sin\varphi$$
$$V_\varphi = -V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi \qquad (9^*)$$
$$V_z = V_z.$$

Vektor $\vec{V}$, enačba (1*), je sedaj mogoče, z uporabo enačbe (8*), preprosto neposredno zapisati v novi bazi, saj velja,

$$\vec{V} = V_x\ \vec{i} + V_y\ \vec{j} + V_z\ \vec{k}$$
$$= (V_x \cos\varphi + V_y \sin\varphi)\ \vec{e}_\rho + (-V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi)\ \vec{e}_\varphi + V_z\ \vec{k} \qquad (10^*)$$

in komponente tako transformiranega vektorja $\vec{V}$ v novo bazo očitno potrjujejo pravilnost izrazov v enačbi (9*).

Obdelani 3-dimenzionalni primer je zelo preprost, saj gre za bazi, ki se razlikujeta zgolj v dveh vektorjih. Bistveno drugačni izrazi pa nastopijo v primeru, če si n.pr. za novo bazo izberemo enotne vektorje krogelnega koordinatnega sistema, tedaj se namreč transformura tudi komponenta V_z. Ker ima vsak m-dimenzionalni vektorski prostor poljubno število baz (vsako bazo pa tvori m linearno neodvisnih vektorjev danega m-dimenzionalnega prostora) postane transformacija vektorja med različnimi bazami danega vektorskega prostora precej manj pregledna.

Metoda simpleks

Zadani problem zahteva poiskati **maksimum namenske funkcije**, z, ki je **linearna** funkcija r neodvisnih **nenegativnih** spremenljivk, x_r,

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots. + c_r x_r \qquad (4)$$

kjer so c-ji dane konstante in nenegativne neodvisne spremenljivke, $\mathbf{x_j \geq 0}$, j = 1, 2, ...r, zadoščajo **m-lineranim neenačbam**,

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots.. + a_{1r} x_r &\leq b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots.. + a_{2r} x_r &\leq b_2 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \ldots\ldots.. + a_{3r} x_r &\leq b_3 \qquad (5) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots.. + a_{mr} x_r &\leq b_m
\end{aligned}$$

pri čemer so konstante $\mathbf{b_k \geq 0}$, **nenegativna** števila. Sistem, enačba (5), z uvedbo m-**dopolnilnih spremenljivk**, x_{r+1}, x_{r+2},....., x_{r+m} spremenimo v **sistem m-linearnih enačb**, pri čemer so dopolnilne neodvisne spremenljivke nenegativne spremenljivke (torej $\mathbf{x_j \geq 0}$, **j = 1, 2, ...r, r+1, r+2, ..., r+m**), ki torej zadoščajo izrazom,

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots.. + a_{1r} x_r + x_{r+1} + 0\, x_{r+2} + \ldots\ldots\ldots\ldots.. + 0\, x_{r+m} &= b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots.. + a_{2r} x_r \qquad + x_{r+2} \qquad\qquad &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad (6) \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots. + a_{mr} x_r + 0\, x_{r+1} + 0\, x_{r+2} + \ldots\ldots\ldots.. + x_{r+m} &= b_m
\end{aligned}$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots + c_r x_r + \ldots. + c_m x_m + c_{m+1} x_{m+1} + \ldots\ldots\ldots + c_{r+m} x_{r+m} = z$$

S tako dopolnjenimi spremenljivkami <u>se namenska funkcija ne spremeni</u>, saj lahko vse konstante c_j **postavimo nič**, $c_j = 0$, j = m+1, m+2,......, m+r.

Z definicijo m dimenzionalnih vektorjev $\vec{P}_i$, kjer je i = 1, 2, 3,..., r+m, ki jih tvorimo iz stolpičev koeficientov neodvisnih spremenljivk x_j, j = 1, ..., r+m, in vektorja $\vec{P}_0$, ki ga tvorijo (znani) nenegativni koeficienti <u>desne</u> strani sistema,

$$\vec{P}_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \\ \\ a_{mi} \end{bmatrix} \qquad i = 1, \ldots\ldots, r+m, \text{ in} \qquad \vec{P}_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (7)$$

pri čemer so vsi vektorji, ki odgovarjajo koeficientom dopolnilnih spremenljivk, torej vektorji $\vec{P}_{r+1}$, ..., $\vec{P}_{r+m}$, enotni vektorji, torej,

$$\vec{P}_{r+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{P}_{r+2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \vec{P}_{r+m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Po analogiji z tridimenzionalnim vektorskim prostorom lahko brž ugotovimo, da izrazi enačbe (8), predstavljajo **m linearno neodvisnih vektorjev in so torej baza m-dimenzionalnega vektorskega prostora.** Če je $\vec{V}$ poljubni vektor tega m-dimenzionalnega prostore, kjer so

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ v_m \end{bmatrix}$$

$v_1, v_2, \ldots, v_m$ njegove komponente, tedaj namreč velja,

$$\vec{V} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots\ldots + v_m \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ v_m \end{bmatrix}$$

Potrebno pa se je zavedati, da baza vektorskega prostora **ni enolično določena**; namreč vsaka skupina m <u>linearno neodvisnih vektorjev</u> tvori bazo m dimenzionalnega vektorskega prostora. Iz zapisanega sledi, da mora biti skupina m+1 (ali več) vektorjev linearno <u>odvisnih</u> med seboj saj po definiciji tvori bazo poljubnih m linearno neodvisnih vektorjev s katerimi lahko izrazimo poljubni vektor tega vektorskega prostora.

Izraz (6), t.j. problem linearnega programiranje, se sedaj lahko zapiše v ekvivalentni vektorski obliki na naslednji način,

$$x_1 \vec{P}_1 + x_2 \vec{P}_2 + x_3 \vec{P}_3 + \ldots\ldots + x_r \vec{P}_r + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_{r+m} \vec{P}_{r+m} = \vec{P}_0 \tag{9}$$

pri čemer morajo x-i zadoščati maksimumu namenske funkcije z, enačba (14).

Enačba (9), gledano čisto formalno, pa pravzaprav predstavlja sistem linearno **odvisnih** vektorjev $\vec{P}_i$, i = 1, 2, 3, ..., r+m in vektorja $\vec{P}_0$, skupno torej r+m+1 vektorjev v m dimenzionalnem prostoru. Toda, ker so vektorji linearno odvisni (saj x-i v zadanem problemu hkrati ne morejo biti vsi enaki 0) je mogoče vsaj enega med njimi izraziti kot linearno kombinacijo preostalih vektorjev. V tem primeru smo množico vektorjev zmanjšali za enega. Če so preostali vektorji še naprej linearno odvisni se postopek ponovi in število vektorjev je zmanjšano še za enega, torej skupno za dva vektorja. Takšna redukcija števila vektorjev se lahko nadaljuje vse dotlej dokler ni njihovo število enako dimenziji vektorskega prostora, ki znaša m. **Bazo m-dimenzionalnega vektorskega prostora predstavlja vsak sistem natančno m (od nič različnih) vektorjev, ki posedujejo naslednji lastnosti:**

a) vektorji sestavljajo sistem m linearno neodvisnih vektorjev in

b) vsak vektor (tega) m-dimenzionalnega vektorskega prostora se lahko izrazi kot linearna kombinacija tako izbranih m linearno neodvisnih vektorjev.

Definirajmo sedaj vektor $\vec{X}$, katerega r+m komponent tvorijo neodvisne spremenljivke linearnega programa $x_1, x_2, ..., x_{r+m}$,

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \\ x_{r+m} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

tedaj je mogoče enačbo (9) zapisati v alternativni matrični obliki,

$$A\ \vec{X} = \vec{P}_0 \qquad (11)$$

pri čemer sedaj matriko A sestavljajo stolpci vektorjev $\vec{P}_i$, i = 1, ..., r+m. Zapisano eksplicitno se matrika A glasi,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & .. & .. & .. & a_{1r} & 1 & 0 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & .. & .. & .. & a_{2r} & 0 & 1 & 0 & .. & .. & .. & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. & .. & .. & .. & a_{3r} & 0 & 0 & 1 & 0 & .. & .. & 0 \\ .\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & . & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & .. & 0 \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & a_{m-1,3} & & & & & a_{m-1,r} & 0 & 0 & 0 & .. & .. & 1 & 0 \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & a_{m,4} & .. & .. & .. & a_{m,r} & 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Po predpostavki je rang matrice A enak m kar pomeni, da je število linearno neodvisnih stolpcev (oziroma število linearno neodvisnih vrstic) matrike A enako m.

Iz matrice A si izberimo **nesingularno m x m matrico**. To pomeni, da zadržimo poljubnih m stolpičev matrice A, ostalo pa izpustimo. V tem primeru se izraz (9) poenostavi v,

$$\vec{P}_0 = x_1 \vec{P}_1 + x_2 \vec{P}_2 + x_3 \vec{P}_3 + ...+ x_m \vec{P}_m \qquad (12)$$

pri čemer pa smo sedaj (ker smo izbrali m poljubnih stolpcev matrice A) preštevilčili spremenljivke! Ker je matrica A ranga m to pomeni, da so stolpiči matrike (vektorji $\vec{P}_j$, j = 1, 2, ..., m) linearno neodvisni in torej tvorijo bazo danega m-dimenzionalnega vektorskega prostora.

Osredotočimo se na vektor $\vec{X}$ enačbe (10), ki je rešitev izraza (11). Komponente tega vektorja pri pogoju, da so vse vrednosi nenegativne, torej, $x_i \geq 0$, i = 1, ..., r+m, predstavljajo rešitev problema linearnega programiranja. Takšno rešitev imenujemo **možno rešitev!** Če pa velja, da je m rešitev <u>nenegativnih</u> (torej toliko kot znaša baza) vse preostale pa so <u>enake nič</u> se takšna rešitev imenuje **bazna možna** rešitev. Poudariti velja, da se definicija nanaša na m poljubnih spremenljivk (nikakor ni nujno, da se nahajajo na zaporednih mestih. V splošnem torej teh m spremenljivk tedaj preimenujemo, oziroma jih preštevilčimo).

TEOREM: če poseduje izraz A $\vec{X} = \vec{P}_0$, enačba (11), možno rešitev, tedaj je le-ta bazna možna rešitev

Dokaz. Po predpostavki je $\vec{X}$ možna rešitev zadanega problema in zato obstaja p komponent (po potrebi jih preštevilčimo) takšnih, da je $x_1, x_2, x_3, ... , x_p > 0$ vse ostale spremenljivke, torej $x_{p+1} = x_{p+2} = x_{p+3} = ... = x_m = 0$. Izraženo s stolpiči matrice A se izraz (11) zapiše,

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \vec{P}_i = \vec{P}_0 \qquad (13)$$

Če so vektorji na levi strani izraza (13) linearno neodvisni tedaj je število $\mathbf{p \leq m}$ ker je rang matrice A enak m (torej obstaja m linearno neodvisnih stolpcev). V tem primeru predstavlja vektor $\vec{X}$ bazno možno rešitev, kar je neposredno očitno, če je $\mathbf{p = m}$. V primeru, da je $\mathbf{p < m}$ lahko tej linearni kombinaciji dodamo m – p vektorjev $\vec{P}$ od katerih je vsak pomnožen z ničlo tako, da za $x_1, x_2, x_3, ..., x_p > 0$ ter $x_{p+1} = x_{p+2} = ...= x_m \equiv 0$ in na takšen način dobimo bazno možno rešitev.

Toda, če je $\mathbf{p > m}$ tedaj so vektorji $\vec{P}_1, \vec{P}_2, ..., \vec{P}_p$ med seboj linearno odvisni. V tem primeru obstaja takšna konstanta $u_k > 0$, da je

$$u_k \vec{P}_k = - \sum_{i=1}^{p}{}' u_i \vec{P}_i \qquad (14)$$

kjer črtica pri znaku za vsoto na desni strani izraza (22) pomeni i ≠ k. Če zapisani izraz vstavimo v (13),

$$\sum_{i=1}^{p}{}' x_i \vec{P}_i + x_k \vec{P}_k = \vec{P}_0 \qquad (15)$$

dobimo z upoštevanjem (14)

$$\sum_{i=1}^{p}{}' \left(x_i - x_k \frac{u_i}{u_k} \right) \vec{P}_i = \vec{P}_0 \tag{16}$$

kar pomeni, da smo dobili **novo rešitev**,

$$\bar{x}_i = x_i - x_k \frac{u_i}{u_k} \quad \text{pri čemer velja, da } i \neq k, \tag{17}$$

ki se od prejšnje razlikuje v dejstvu, da nastopa v njej ena **nenegativna spremenljivka manj.** Dobljena rešitev je možna, če je $\bar{x}_i \geq 0$. Toda vedno je mogoče izbrati takšen k, da je dobljena rešitev možna rešitev. Ker je $x_k > 0$ in je $u_k > 0$ sledi, da je $\bar{x}_i > 0$, če je $u_i \leq 0$. Toda vedno pa obstaja takšen $u_i > 0$. V tem primeru tvorimo po vrsti vse kvociente x_i/u_i takšne, kjer **je $u_i > 0$**. Tedaj **izberemo takšen k** za katerega velja

$$\frac{x_k}{u_k} = \min \frac{x_i}{u_i} \quad \text{ob pogoju, da je } u_i > 0 \tag{18}$$

in zato je

$$\frac{\bar{x}_i}{u_i} = \frac{x_i}{u_i} - \frac{x_k}{u_k} \geq 0 \tag{19}$$

kar izraža dejstvo, da je $\bar{x}_i \geq 0$. Izhajajoč iz predpostavke, da je p > m smo dobili novo možno rešitev, ki ima <u>eno pozitivno spremenljivko manj</u>, kot začetna možna rešitev. Z nadaljevanjem opisane metode po končnem številu korak se dobi bazna možna rešitev. S tem je začetna trditev dokazana.

Na tem mestu je potrebno brez dokaza navesti, da dobljena **bazna rešitev ustreza eni od ekstremnih točk (sečišču) konveksnega poliedra. Če se ta bazna rešitev ne izraža v maksimumu namenske funkcije je tedaj potrebno zamenjati bazo vektorskega prostora s tem, da eno od spremenljivk v izrazu izvržemo in vpeljemo drugo. Ta zamenjave baze odgovarja premik na drugo ekstremno točko konveksnega poliedra in na nov izračun namenske funkcije. Ta postopek ponavljamo vse dokler ne najdemo bazno možno rešitev za katero zavzame namenska funkcija maksimalno vrednost, ali pa indikacijo, da takšna za zadani problem ne obstaja.**

REŠEVANJE PROBLEMA LINEARNEGA PROGRAMIRANJA PO METODI SIMPLEKS Z UPORABO GAUSSOVE ELIMINACIJE

Vzemimo, da smo matriko A preuredili tako, da je prvih m stolpcev matrike A linearno neodvisnih in torej tvorijo vrednosti x_1, x_2, ..., x_m (m+r označimo z n) bazno možno rešitev. Matematični zapis zadanega problema (vključno z namensko funkcijo, z) je,

$$
\begin{array}{l}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1m} x_m + \ldots\ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots + a_{2m} x_m + \ldots\ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\
a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \ldots\ldots + a_{3m} x_m + \ldots\ldots + a_{3n} x_n = b_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots + a_{mm} x_m + \ldots\ldots + a_{mn} x_n = b_m \\
\\
c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + \ldots + c_m x_m + \ldots\ldots\ldots + c_n x_n = z
\end{array}
\qquad (20)
$$

V izrazih (20) pomeni indeks n vsoto obeh prvotnih indeksov, **n = m + r**.

Z uporabo metode Gaussove eliminacije (Pozor: Gausova eliminacija poteka preko m+1 linearnih enačb, torej tudi namenske funkcije) prevedemo zapisani sistem v naslednjo shemo,

$$
\begin{array}{l}
x_1 + \qquad a_{1m+1}' x_{m+1} + \ldots\ldots + a_{1k}' x_k + \ldots\ldots + a_{1n}' x_n = b_1' \\
\quad x_2 + \qquad a_{2m+1}' x_{m+1} + \ldots\ldots + a_{2k}' x_k + \ldots\ldots + a_{2n}' x_n = b_2' \\
\qquad x_3 + \qquad a_{3m+1}' x_{m+1} + \ldots\ldots + a_{3k}' x_k + \ldots\ldots + a_{3n}' x_n = b_3' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad x_m + a_{m,m+1}' x_{m+1} + \ldots\ldots + a_{m,k}' x_k + \ldots\ldots + a_{mn}' x_n = b_m' \\
\\
\qquad\qquad\qquad c_{m+1}' x_{m+1} + \ldots\ldots + \mathbf{c_k' x_k} + \ldots\ldots + c_n' x_n = z - N_1
\end{array}
\qquad (20)
$$

Črtice pri koeficientih pomenijo, da gre za transformirane koeficiente, kot rezultat Gausove eliminacije in $N_1 = c_1' x_1 + c_2' x_2 + \ldots\ldots + c_m' x_m$, pri čemer so koeficienti c_j' (j = 1, 2, ..., m) prav tako transformirani preko m-1 Gaussovih eliminacij (ne pozabi: 1. eliminacija eliminira vse koeficiente prvega stolpiča – razen prvega, ki je po deljenju enak 1; druga eliminacija koeficiente drugega stolpiča - razen koeficienta druge eliminacijske enačbe, ki je po deljenju enačbe 1; itd., vse do m-1 eliminacije).

V premeru, da so vsi transformirani koeficienti desne strani **pozitivni**, b_1', b_2', b_3', ..., $b_m' > 0$, dobimo takoj bazno možno rešitev tako, da postavimo $x_{m+1} = x_{m+2} = \ldots\ldots x_k \ldots\ldots = x_n = 0$, saj tedaj očitno velja,

$$
\begin{array}{l}
x_1 = b_1' \\
x_2 = b_2' \\
x_3 = b_3' \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m = b_m' \quad \text{in tudi} \\
\\
z = N_1
\end{array}
\qquad (21)
$$

Na takšen način smo izračunali vrednost namenske fukcije z. Toda v splošnem dobljena vrednost še ne predstavlja maksimalne vrednosti, kot je to razvidno iz nadalnjega. POZOR: izrazi (20') – namensko funkcijo z izvzamemo - je samo drugačni, bolj domač, zapis sistema m linearnih enačb, ki je popolnoma ekvivalenten zapisu (9), oziroma zapisu (12) tedaj, ko so vse komponente večje kot m postavljene 0. Iz izraza (21) je očitno, da so vektorji $\vec{P}_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$ enotni vektorji, ki ustrezajo (preštevilčenim) vektorjem izraza (8).

Vzemimo sedaj, da je koeficient, $\mathbf{c_k' > 0}$, kjer se indeks **k** nahaja v intervalu $\mathbf{m+1 \le k \le n}$, po izvedeni Gaussovi eliminaciji, **pozitiven**. Iz zadnje enačbe (namenska fukcija) izraza (20) je tedaj razvidno, da v primeru, ko postavimo $x_i = x_k\,\delta_{i,k}$ za indeks $i = m+1, m+2, m+3, \ldots, k-1, k, k+1, \ldots, n$ zavzame namenska funkcija z novo, <u>večjo</u>, vrednost, ki je enaka

$$z = N_1 + c_k'\,x_k.$$

V tem primeru komponente x_i seveda niso več podane z izrazom (21), marveč dobimo,

$$x_i = b_i' - a_{ik}'\,x_k \quad \text{kjer je } i = 1, 2, 3, \ldots, m. \tag{22}$$

ali (<u>ne pozabi k > m !</u>)

$$\begin{aligned}
x_1 &= b_1' - a_{1k}'\,x_k \\
x_2 &= b_2' - a_{2k}'\,x_k \\
x_3 &= b_3' - a_{3k}'\,x_k \\
\ldots &\quad \ldots \quad \ldots \\
x_j &= b_j' - a_{jk}'\,x_k \\
\ldots &\quad \ldots \quad \ldots \\
x_m &= b_m' - a_{mk}'\,x_k
\end{aligned} \tag{23}$$

Vrnimo se na sistem (20), oziroma (21) pri čemer sedaj obdržimo komponento x_k, ostale komponente možne rešitve pa postavimo enako 0. Tako definirani sistem se zapisan v (alternativni) vektorski obliki sedaj glasi (POZOR: tu so komponente x_i, $i = 1, \ldots, m$, še vedno podane z izrazi (21) in ne z (23)!)

$$x_1\vec{P}_1 + x_2\vec{P}_2 + x_3\vec{P}_3 + \ldots + x_j\vec{P}_j + \ldots + x_m\vec{P}_m + x_k\vec{P}_k = \vec{P}_0 \tag{23a}$$

kjer sta vektorja $\vec{P}_k$ in $\vec{P}_0$ sedaj definirana, kot

$$\vec{P}_k = \begin{bmatrix} a_{1,k}' \\ a_{2,k}' \\ \\ a_{m,k}' \end{bmatrix} \qquad\qquad \vec{P}_0 = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \\ b_m' \end{bmatrix}$$

Na tem mestu ugotovimo, da je izraz (23a) zapisan kot kombinacija m+1 linearno odvisnih vektorjev m dimenzionalnega vektorskega prostora in takšen zapis ustreza splošnemu zapisu, kot ga izraža enačba (14) le da je tukaj črtici podan drugačen pomen. Ugotovimo, da je vektor $\vec{P}_k$ nebazni vektor. Toda vektor $\vec{P}_k$ se lahko z danimi baznimi vektorji $\vec{P}_i$, i = 1, 2, ..., m, izrazi na znani način (glej izraz, ki sledi enačbi (8)),

$$\vec{P}_k = a_{1,k}' \vec{P}_1 + a_{2,k}' \vec{P}_2 + \ldots\ldots + a_{j,k}' \vec{P}_j + \ldots\ldots + a_{m,k}' \vec{P}_m \qquad (23b)$$

Pomnožimo sedaj izraz (23b) s še ne definiranim pozitivnim številom θ in ga odštejmo od izraza (23a). Rezultat je,

$$(x_1 - \theta a_{1,k}')\vec{P}_1 + (x_2 - \theta a_{2,k}')\vec{P}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (x_j - \theta a_{j,k}')\vec{P}_j + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ (x_m - \theta a_{m,k}')\vec{P}_m + \theta \vec{P}_k = \vec{P}_0$$

Torej še vedno smo dobili kombinacijo linearno odvisnih vektorjev, ki potemtakem predstavlja možno (toda ne bazno!) rešitev, saj predstavljajo koeficienti ($x_i - \theta a_{i,k}'$), i = 1, 2, ...m, z dodatnim koeficientom θ skupaj m+1 komponent te možne rešitve, glej (10), torej,

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 - \theta a_{1,k}' \\ x_2 - \theta a_{2,k}' \\ \ldots \\ x_m - \theta a_{m,k}' \\ \theta \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix}$$

ob pogoju, da je pozitivno število θ takšno, da nobena komponenta možne rešitve, vektorja $\vec{X}$ ni negativna. Če upoštevamo sedaj še izraze (21) se možna (toda nebazna) rešitev glasi,

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} b_1' - \theta a_{1,k}' \\ b_2' - \theta a_{2,k}' \\ \ldots \\ b_m' - \theta a_{m,k}' \\ \theta \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (23c)$$

Ta rešitev (23c) postane bazna brž, ko je ena komponenta enaka 0 kar se lahko doseže z ustrezno izbiro števila θ tako, da je ena od zgoraj zapisanih komponent enaka 0. Le-to ne moremo izbrati poljubno marveč le na takšen način, da nobena komponenta možne rešitve ne postane negativna.

Iz primerjave (23c) z izrazi sistema (23) ugotovimo, da slednji podaja komponente možne (toda ne še bazne) rešitve linearnega problema. Potrebno je torej določiti še ustrezno izbiro pozitivnega parametra θ.

Zapisane vrednosti sistema (23) za x_i, kjer je i = 1, 2, ..., m pa predstavljajo možno rešitev linearnega problema pod pogojem, da so vse zapisane vrednosti izraza (23) nenegativne, torej

$$b_i' - a_{ik}' x_k \geq 0 \quad \text{za } i = 1, 2, 3, ..., m. \qquad (24)$$

Če so vsi koeficienti a_{ik}' stolpiča pri spremenljivki x_k, glej izraz (20), negativna števila je tedaj pogoju (24) vedno zadoščeno in dobimo možno rešitev (ki pa ni bazna možna rešitev!) katere vrednost namenske funkcije $z \to \infty$. Toda v splošnem bo eden ali več koeficientov v k-tem stolpcu $\mathbf{a_{ik}' > 0}$, **t.j. pozitivnih** in kakšna spremenljivka (leva stran) izraza (23) bi tedaj lahko zavzela negativno vrednost. Da se to ne zgodi in naša rešitev ostane še naprej možna rešitev postopamo na naslednji način: za vse primere kjer je $\mathbf{a_{ik}' > 0}$ tvorimo po vrsti naslednje kvociente,

$$\frac{b_i'}{a_{ik}'} \quad i = 1, 2, ..., m \qquad (25)$$

in poiščemo tistega, ki zavzame **minimalno** (seveda pozitivno) vrednost. Pa vzemimo, da je kvocient vrstice j tisti, ki podaja minimalno vrednost tako dobljenih izrazov. Označimo to vrednost s θ, torej (pozor m < k),

$$\theta = \frac{b_j'}{a_{jk}'} \qquad (26)$$

je minimalna vrednost vseh tako izračunanih kvocientov. Toda velja,

$$x_j = b_j' - a_{jk}' x_k \tag{27}$$

zato je tudi ($a_{jk}' > 0$)

$$\frac{x_j}{a_{jk}'} = \frac{b_j'}{a_{jk}'} - x_k \geq 0 \tag{28}$$

in ker predstavlja x_j komponento možne rešitve, $x_j \geq 0$, sledi da je desna stran izraza (28) večja ali enaka nič. Naša možna rešitev trenutno sestoji iz m+1 komponent, in zato ni bazna rešitev, pri čemer velja,

$$x_k \leq \frac{b_j'}{a_{jk}'} = \theta \tag{29}$$

Neenačba (29) pomeni, da naša rešitev ostane možna rešitev (ni pa to bazna možna rešitev) tako dolgo dokler je $x_k < \theta$. Toda v primeru enačaja dobimo bazno možno rešitev saj tedaj velja, da je x_j identično enak nič (pri čemer je seveda $a_{jk}' > 0$), x_k pa je pozitivno število. Rečeno drugače, θ je **maksimalna vrednost, ki jo lahko pripišemo komponenti x_k** v tem postopku pri čemer še vedno dobimo možno rešitev. Samo v primeru, ko je $x_k = \theta$ postane možna rešitev tedaj bazna možna rešitev. V opisanem postopku smo v tem primeru povečali vrednost namenske funkcije na $N_1 + c_k' \theta$. Če torej izberemo vrednost θ, kot vrednost za x_k, kjer je $x_k = \theta$, tedaj iz izraza (27) sledi,

$$x_j = b_j' - a_{jk}' x_k = b_j' - a_{jk}' \frac{b_j'}{a_{jk}'} = 0 \tag{30}$$

To pomeni, da je j-ta komponenta možne rešitve enaka nič in z opisano izbiro predstavlja nova možna rešitev bazno bazno možno rešitev, ki sestoji iz m-1 nenegativnih komponent ter komponente $x_k = \theta$. **To dejstvo lahko opišemo, kot postopek pri katerem smo iz baze iznesli komponento x_j in jo nadomestili z novo komponento x_k.**

Opisani postopek se nadaljuje vse dokler je v transformirani namenski funkciji **vsaj eden** od transformiranih koeficientov namenske funkcije **pozitiven**, $c_s^{trans} > 0$, kjer je $m+1 \leq s \leq n$ (= m+r).

Zgled: metoda simpleks

A) Gaussova eliminacija

Pa rešimo v začetku zapisani problem s pomočjo Gaussove eliminacije z upoštevanjem metode simpleks, t.j. metode, ki na enostaven način – z na ustrezen način izbrano eliminacijo spremenljivk - omogoča neposredni sočasni analitični izračun namenske funkcije.

Rešujemo z dopolnilnimi spremenljivkami opremljen sistem linearnih enačb (2)

$$\begin{aligned} 2x + 2y + u &= 900 \\ 2x + y + v &= 700 \\ x + 2y + w &= 800. \\ 2x + 3y &= z \end{aligned} \tag{2}$$

Za Gaussovo eliminacijo z uporabo metode simpleks se izbere **najmanjšo vrednost** kvocienta desnih strani enačbe s koeficienti ustrezne sprememenljivke, t.j. min $\frac{b_i}{a_{i1}}$, i = 1, 2, 3, ki jo želimo iz enačb eliminirati. Ta razmerja so za spremenljivko x naslednja:

$$x: \quad \frac{900}{2}, \ \frac{700}{2}, \ \frac{800}{1} \tag{31}$$

Očitno je najmanjši kvocient enak 700/2 = 350, ki zadošča drugi enačbi. Z zamenjavo vrstic jo postavimo na prvo mesto in jo uporabimo za Gaussovo eleminacijo spremenljivke x iz preostalih enačb. Rezultat prve eliminacije je,

$$\begin{aligned} x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}v &= 350 \\ y + u - v &= 200 \\ \frac{3}{2}y - \tfrac{1}{2}v + w &= 450 \\ 2y - v &= z - 700 \end{aligned} \tag{32}$$

Če postavimo y = 0 in v = 0, je vrednost namenske funkcije enaka **z = 700**, možna bazna rešitev se pa zapiše,

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} x = 350 \\ y = 0 \\ u = 200 \\ v = 0 \\ w = 450 \end{bmatrix} \tag{33}$$

Koeficient $c_2^{'}$ pred spremenljivko y v namenski funkciji je pozitiven in enak 2. Osredotočimo se na ta y-stolpič in izračunajmo ustrezne kvociente. Le-ti $\left(\frac{b_i^{(1)}}{a_{i,2}^{(1)}}\right)$ so:

$$y: \quad \frac{350}{1/2}, \quad \frac{200}{1}, \quad \frac{450}{3/2} \tag{34}$$

Torej je najmanjša vrednost $\theta = \left(\frac{b_2^{(1)}}{a_{2,2}^{(1)}}\right) = 200$. S pomočjo druge enačbe tedaj eliminiramo spremenljivko y **iz vseh preostalih enačb**. (Pozor: gre za sistematično eliminacijo spremenljivk ter s tem pomikanjem od ene ekstremne točke konveksnega poliedra k drugi in ne za določanje zgornje trikotne matrice U!!). Na tej osnovi vnesemo v bazo komponento y izvzamemo pa u. Za eliminacijo naslednje spremenljivke (t.j. zamenjava baze), nadaljujemo po zgornjem postopku,

$$\begin{array}{llllll} x & & -\frac{1}{2}u & +\ v & & = 250 \\ & y & +\ u & -\ v & & = 200 \\ & & -\frac{3}{2}u & +\ v & +\ w & = 150 \\ & & -\ 2u & +\ v & & = z - 1100 \end{array} \tag{35}$$

Če sedaj postavimo u = 0 in v = 0, je vrednost namenske funkcije **z = 1100** enot in naslednja bazna možna rešitev (t.j. naslednja ekstremna točka konveksnega poliedra) je,

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} 250 \\ 200 \\ 0 \\ 0 \\ w = 150 \end{bmatrix} \tag{36}$$

V izrazu (35) je koeficient $c_4^{(2)}$ (t.j. koeficent pred spremenljivko v) namenske funkcije pozitiven in enak 1. Najmanjši kvocient θ očitno predstavlja izraz $\theta = \frac{b_3^{(2)}}{a_{3,4}^{(2)}} = 150$ zato s pomočjo tretje enačbe vpeljemo v bazo komponento v in odstranimo w. Po naslednji, tretji, redukciji gornjega sistema dobimo,

$$\begin{array}{llllll} x & & +\ u & & -\ w & = 100 \\ & y & -\frac{1}{2}u & & +\ w & = 350 \\ & & -\frac{3}{2}u & +\ v & +\ w & = 150 \\ & & -\frac{1}{2}u & & -\ w & = z - 1250 \end{array} \tag{37}$$

Vsi koeficienti namenske funkcije so sedaj negativni in posledično je tedaj njena vrednost enaka maksimalni vrednosti. Za u = 0 in w = 0 dobi namenska funkcija optimalno vrednost **z = 1250** enot in končna bazna možna rešitev se glasi,

$$\bar{X} \quad = \quad \begin{bmatrix} x = 100 \\ y = 350 \\ u = 0 \\ v = 150 \\ w = 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

Za dosego največjega profita je torej potrebno izdelati 100 enot prvega produkta in 350 enot drugega, pri čemer postane vrednost namenske funkcije največja in znaša 1250 denarnih enot. Naša optimalna možna bazna rešitev vstavljena v začetni sistem navaja porabo vseh surovin, ki je

200 + 700 = 900 enot surovine A
200 + 350 = 550 enot surovine B (ostane torej 150 enot neuporabljenih)
100 + 700 = 800 enot surovine C

B) Vektorska metoda

Vrnimo se na osnovni problem, t.j. reševanje z dopolnilnimi spremenljivkami opremljen gornji sistem linearnih enačb (2)

$$
\begin{aligned}
2x + 2y + u \quad\quad\quad &= 900 \\
2x + y \quad + v \quad\quad &= 700 \\
x + 2y \quad\quad + w &= 800. \\
2x + 3y \quad\quad\quad &= z
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Skladno izrazu (12) je nemudoma razvidno, da je v danem primeru indeks m = 3, tako, da se v vektorski obliki sistem enačb (tokrat brez namenske funkcije) zapiše v obliki,

$$x\,\vec{P}_1 + y\,\vec{P}_2 + u\,\vec{P}_3 + v\,\vec{P}_4 + w\,\vec{P}_5 = \vec{P}_0 \tag{38}$$

kjer so posamezni vektorji, $\vec{P}_i$, i = 1, 2, 3, vektorji tridimenzionalnega prostora, in sicer

$$\vec{P}_1 = \begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} \quad \vec{P}_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} \quad \vec{P}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad \vec{P}_4 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \vec{P}_5 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{P}_0 = \begin{bmatrix}900\\700\\800\end{bmatrix} \tag{39}$$

Vektorski enačbi (38) očitno ustreza možna rešitev (ki pa ni bazna možna rešitev), $\vec{X}$, katere elementi so,

$$\vec{X} = \begin{bmatrix}x\\y\\u\\v\\w\end{bmatrix} \tag{40}$$

Vsak vektor danega vektorskega prostora se na enolični način izrazi, kot linearna kombinacija vektorjev izbrane baze tega prostora. Izberimo vektorje $\vec{P}_i$, kjer je i = 3, 4, in 5 kot bazne vektorje in tedaj torej (izberemo x = 0 in y = 0, glej (38), s čimer smo dobili prvo ekstremno točko konveksnega poliedra v kateri je vrednost namenske funkcije enaka z = 0) velja,

$$900\,\vec{P}_3 + 700\,\vec{P}_4 + 800\,\vec{P}_5 = \vec{P}_0 \tag{41}$$

Izrazimo sedaj še vektorja $\vec{P}_1$ in $\vec{P}_2$ v izbrani bazi,

$$\vec{P}_1 = 2\,\vec{P}_3 + 2\,\vec{P}_4 + \vec{P}_5 \tag{42}$$

$$\vec{P}_2 = 2\,\vec{P}_3 + \vec{P}_4 + 2\,\vec{P}_5 \tag{43}$$

Zamenjajmo bazo; uvedimo n. pr. vektor $\vec{P}_1$ v bazo. Izraz (42) pomnožimo s faktorjem θ in ga odštejmo od izraza (41). Rezultat je naslednji,

$$\vec{P}_0^{(1)} - \theta\,\vec{P}_1 = 900\,\vec{P}_3 + 700\,\vec{P}_4 + 800\,\vec{P}_5 - \theta\,(2\,\vec{P}_3 + 2\,\vec{P}_4 + \vec{P}_5),$$

kjer je $\vec{P}_0^{(1)}$ vektor desne strani izraza (38) po prvi zamenjavi baze,

$$\vec{P}_0^{(1)} = \theta\,\vec{P}_1 + (900\text{-}2\theta)\,\vec{P}_3 + (700\text{-}2\theta)\,\vec{P}_4 + (800\text{-}\theta)\,\vec{P}_5 \tag{44}$$

Minimalna vrednost for $\theta = 350$ s čimer iz baze izvržemo vektor $\vec{P}_4$, tako da se sedaj vektor $\vec{P}_0^{(1)}$ izraža z nova bazo na naslednji način,

$$\vec{P}_0^{(1)} = 350\,\vec{P}_1 + 200\,\vec{P}_3 + 450\,\vec{P}_5 \tag{45}$$

Druga ekstremna točka je torej, x = 350, y = 0, u = 200, v = 0 in w =450. Ker želimo določiti tudi količino y moramo v bazo uvesti vektor $\vec{P}_2$. To storimo na naslednji način: iz izraza (42) imamo,

$$\vec{P}_4 = ½\,\vec{P}_1 - \vec{P}_3 - ½\,\vec{P}_5 \tag{46}$$

vstavimo v izraz (43) in dobimo,

$$\vec{P}_2 = ½\,\vec{P}_1 + \vec{P}_3 + \tfrac{3}{2}\,\vec{P}_5 \tag{47}$$

Izraz (47) pomnožimo s θ in ga odštejemo od izraza (45) in po preureditvi dobimo,

$$\vec{P}_0^{(2)} - \theta\,\vec{P}_2 = (350 - ½\,\theta)\,\vec{P}_1 + (200 - \theta)\,\vec{P}_3 + (450 - \tfrac{3}{2}\,\theta)\,\vec{P}_5 \tag{48}$$

Minimalna vrednost za $\theta = 200$ in s to izbiro izvržemo iz baze vektor $\vec{P}_3$. Velja sedaj,

$$\vec{P}_0^{(2)} = 250\,\vec{P}_1 + 200\,\vec{P}_2 + 150\,\vec{P}_5 \tag{49}$$

in nova ekstremna točka je x = 250, y = 200, u = 0, v = 0 in w = 150.
Uvedimo sedaj v bazo vektor $\vec{P}_4$. V ta namen odštejmo od izraza (42) enačbo (43) in dobimo,

$$\vec{P}_4 = \vec{P}_5 - \vec{P}_2 + \vec{P}_1 \tag{50}$$

pomnožimo dobljen izraz z θ in ga odštejmo od (49). Rezultat je,

$$\vec{P}_0^{(3)} = \theta\ \vec{P}_4 + (250-\theta)\ \vec{P}_1 + (200+\theta)\ \vec{P}_2 + (150-\theta)\ \vec{P}_5 \tag{51}$$

od koder sledi za $\theta = 150$ končni rezultat,

$$\vec{P}_0^{(3)} = 100\ \vec{P}_1 + 350\ \vec{P}_2 + 150\,\vec{P}_4 \tag{52}$$

iz katerega je razvidno, da je x = 100, y = 350, u = 0, v = 150 in w = 0. Vrednost namenske funkcije je tedaj $z = 2\,x + 3\,y = 1250$ in je maksimalna.

Vektor desne stran izraza (41) smo izrazili z baznimi vektorji $\vec{P}_3$, $\vec{P}_4$ in $\vec{P}_5$, nato v novi bazi z vektorji $\vec{P}_1$, $\vec{P}_3$ ter $\vec{P}_5$, sledila je baza izražena z $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ ter $\vec{P}_5$ in končno v bazi, ki jo sestavljajo vektorji $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ in $\vec{P}_4$. Pokaži, da preostale kombinacije baznih vektorjev rezultirajo v vrednosti namenske funkcije, ki ne dosega zgoraj določene maksimalne vrednosti 1250 denarnih enot.

Literatura

J. W. Dettman, Mathematical Methods in Physics and Engineering, Dover Pub., N.Y. 1969.
Glej tudi: Ivan Vidav, Višja matematika II, DZS 1979, poglavje avtorja Alojzij Vadnala, Linearno programiranje, str. 135 – 187.
Alojzij Vadnal, Rešeni problemi linearnega programiranja, Knjižnica Sigma, Mladinska knjiga, Ljubljana 1971.